

A utilização da função perda de Taguchi sob a ótica das regiões de máximo e mínimo ARL para otimizar os parâmetros estatísticos do gráfico de controle CUSUM

Custodio da Cunha Alves (UNIVILLE) custodio.alves@univille.br
Elisa Henning (UDESC) elisa.henning.@gmail.com
Robert Wayne Samohyl (UFSC) samohyl@deps.ufsc.br
Claiton Emílio do Amaral (UNIVILLE/UFSC) claiton.emilio@univille.net
Altair Carlos da Cruz (UNIVILLE/UDESC) altaircruz@yahoo.com.br

Resumo:

O projeto de otimização de um gráfico de controle tem como referência o tamanho de mudança do processo que é considerado importante a ser detectado. O gráfico de controle de Soma Acumulada (CUSUM - Cumulative SUM) é uma das melhores alternativas disponíveis para detectar de forma eficiente, pequenas mudanças de um processo. Neste trabalho propõe-se um método para a otimização dos parâmetros estatísticos do gráfico CUSUM a partir da utilização da função perda de Taguchi sob a ótica de regiões de máximo e mínimo ARL. Nessa abordagem este gráfico de controle é projetado para o monitoramento de processos em situações onde a relevância não é detectar apenas desvios de pequena magnitude, mas que ao mesmo tempo seja efetivamente eficaz o suficiente para detectar mudanças consideradas importantes. Um exemplo numérico é utilizado para ilustrar o modelo matemático que é desenvolvido para determinar os pontos ótimos que delimitam as regiões de máximo e mínimo ARL do gráfico.

Palavras chave: Função Perda de Taguchi, Gráfico CUSUM, Parâmetros Estatísticos.

The use of Taguchi's loss function from the view point of the regions of maximum and minimum ARL to optimize the statistical parameters of the CUSUM control chart

Abstract

The optimization project of a control chart has as reference the size of the change of the process that is considered important to be detected. The Cumulative Sum (CUSUM) control chart is one of the best alternatives available to efficiently detect small changes in one process. This paper proposes a method for optimization of the statistical parameters of the CUSUM chart based on the use of the Taguchi's loss function from the view point of the regions of maximum and minimum ARL. In this approach this control chart is designed for the process monitoring in situations where the relevance is not only detect deviations of small magnitude, but at the same time is actually effective enough to detect changes that are considered important. A numerical example is used to illustrate the mathematical model that is developed to determine the optimal points that delimit the regions of maximum and minimum ARL of the chart.

Key-words: Taguchi Loss Function; CUSUM Chart; Statistical Parameters.

1. Introdução

O gráfico de controle mais conhecido e amplamente aplicado no monitoramento da estabilidade do valor médio de uma característica de qualidade controlada em uma escala contínua é ainda, sem dúvida, o tradicional gráfico de Shewhart. A consideração feita a este gráfico é o fato de não ser eficiente na detecção de pequenas magnitudes de mudanças, uma vez que, leva em conta apenas as informações da última amostra. Esta ferramenta estatística, apesar de eficaz não é a única disponível para monitorar a qualidade de um processo. Em alguns casos, outros tipos de gráficos de controle podem ser utilizados com a mesma finalidade, e com vantagens. É o caso do gráfico de Soma Acumulada (CUSUM - Cumulative Sum). A principal vantagem deste gráfico é que seu processo de decisão baseia-se na soma acumulada dos resultados, e não em observações isoladas de amostras. Como resultado, apresenta um desempenho muito melhor do que o gráfico do tipo Shewhart quando o tamanho da amostra e a frequência de amostragem são os mesmos (MONTGOMERY, 2004).

No entanto, podem surgir situações onde não é relevante detectar pequenas magnitudes de mudanças. Por exemplo, quando o processo é muito capaz, tentar ajustar mudanças muito pequenas pode levar ao fenômeno de sobre ajuste e a introdução de variabilidade extra no processo (WOODALL, 1985). Além disso, a tentativa de garantir a continuidade absoluta no valor médio pode parecer utópico, uma vez que o valor especificado para a média é muitas vezes escolhido arbitrariamente ou estimado de forma incorreta. Na realidade, quando o valor médio é arredondado um pequeno intervalo de valores é desenvolvido adequadamente para a média atual. Portanto, parece razoável tolerar uma pequena mudança no processo quando se opta em aceitar uma pequena variabilidade no monitoramento da característica de qualidade.

Diante das considerações descritas acima, Woodall (1985) desenvolve um projeto para gráfico de controle de qualidade baseado em valores de parâmetros estatísticos sob a ótica de regiões do gráfico sob controle e fora de controle para definir inicialmente qual tamanho de mudança é importante para ser detectado rapidamente. Na abordagem desse projeto estatístico, o autor fornece também uma justificativa para a escolha entre os diferentes gráficos de controle.

Neste trabalho propõe-se o desenvolvimento de um método de otimização que permita ao usuário determinar os parâmetros estatísticos do gráfico de controle CUSUM para monitorar processos em situações onde a relevância não é detectar apenas desvios de pequena magnitude, mas que seja ao mesmo tempo efetivamente eficaz o suficiente para detectar mudanças importantes. Este método apresenta um procedimento simples baseado em ARL conforme projeto ótimo para gráfico de controle CUSUM recomendado por Gan (1991, 1993), porém com a proposta de adicionar ao algoritmo de procedimentos uma etapa extra, baseada na função perda de Taguchi (1985,1993) sob a ótica de regiões de máximo e mínimo ARL (Woodall, 1985) para otimizar os parâmetros estatísticos deste gráfico. Esta função é utilizada para determinar através da ferramenta solver no ambiente MS-Excel os valores dos pontos ótimos que delimitam essas regiões de máxima e mínima potência do gráfico capaz de maximizar a capacidade de detecção de mudanças reais.

O artigo está estruturado da seguinte forma: a seção 2 apresenta o gráfico CUSUM. A seção 3 aborda o ARL como um indicador estatístico para avaliar o desempenho de gráficos de controle. A seção 4 apresenta as etapas do algoritmo de procedimentos e a definição das regiões de máximo e mínimo ARL do método de otimização proposto. A determinação dessas regiões é objeto de estudo da seção 5 com a utilização da função perda de qualidade de Taguchi. Na seção 6 é mostrado um exemplo numérico de aplicação e, finalmente, a seção 7 apresenta as considerações finais.

2. Gráfico de Controle CUSUM

O monitoramento de pequenas alterações nos parâmetros de um processo é uma tarefa realmente importante numa perspectiva de aumentar a consistência da qualidade de processos e produtos. Os gráficos de controle com memória são ferramentas alternativas de grande sensibilidade, mais apropriadas para a rápida detecção de pequenas alterações, em contraste com os tradicionais gráficos de controle do tipo Shewhart onde apenas a informação do último ponto demarcado no gráfico é considerada. A idéia de gráficos com memória é que sua representação gráfica não se fundamenta em observações individuais, ou médias de subgrupos racionais, mas no acúmulo de observações. É por isso que eles são chamados de gráficos com memória (ZAGO, 2009).

Os modelos de gráficos de controle com memória, também denominados de gráficos de controle avançados tais como o gráfico de Média Móvel Exponencialmente Ponderada EWMA (Exponentially Weighted Moving Average) e o de Somas Acumuladas CUSUM (Cumulative Sum) são aprimoramentos dos gráficos do tipo Shewhart desenvolvidos para em situações específicas minimizar simultaneamente a ocorrência de alarmes falsos e alarmes não dados (SAMOHYL, 2009).

O gráfico de controle de Soma Acumulada (CUSUM), objeto de estudo deste trabalho, inicialmente proposto na Inglaterra por Page (1954) é uma alternativa ao gráfico do tipo Shewhart. Este gráfico incorpora diretamente, toda a seqüência de informações demarcando as somas acumuladas dos desvios em relação ao valor-alvo (valor nominal). É um procedimento que utiliza a soma acumulada dos desvios de cada média aleatória previamente observada em relação ao valor nominal para monitorar a média de um processo (ALVES ET AL, 2011). A motivação básica para a aplicação desse gráfico segundo Jiao e Helo (2008), pode ser a dificuldade para detectar pequenas mudanças de status através da aplicação de outros métodos de controle estatístico de processos.

Diversos procedimentos de decisão foram desenvolvidos para os gráficos de controle de soma acumulada, entre eles destaca-se o CUSUM tabular, onde estatísticas C_i^+ e C_i^- são utilizadas para detectarem tendências positivas e negativas, respectivamente. Estas estatísticas são denominadas CUSUM superior e CUSUM inferior, conforme equações (1) e (2):

$$C_i^+ = \max. [0, X_i - (\mu_o + k) + C_{i-1}^+] \quad (1)$$

$$C_i^- = \max. [0, (\mu_o - k) - X_i + C_{i-1}^-] \quad (2)$$

onde $C_0^+ = C_0^- = 0$. Se C_i^+ ou C_i^- , excede o intervalo de decisão H, o processo é considerado fora de controle. Um valor razoável para H é cinco vezes o desvio padrão σ do processo. Nas equações (1) e (2), k é denominado de valor de referência e, corresponde aproximadamente a metade do valor no qual há interesse em detectar rapidamente determinada mudança entre μ_o (valor nominal) e o valor da média fora de controle μ_1 .

A utilização destes gráficos de controle para monitorar características da qualidade de um processo com pequenas variações apresentam vantagens, considerando-se aspectos estatísticos e econômicos. Sob o ponto de vista estatístico, pode haver uma redução no número médio de amostras até que o gráfico sinalize a ocorrência de uma causa especial. Sob o ponto de vista econômico, pode haver uma redução nos custos relacionados ao controle do processo, causada pela redução na taxa de amostragem quando o gráfico estiver indicando um processo sob controle (ALVES, 2003).

3. O ARL - Número médio de amostras coletadas até à emissão de um sinal

A avaliação e a comparação de diferentes tipos de gráficos de controle são realizadas mediante a utilização de indicadores de desempenho estatísticos e econômicos (ALVES, 2009).

O ARL (Average Run Length) é o número médio de amostras coletadas até à emissão de um sinal. Este sinal, pode ser tanto um alarme falso como um sinal de que o processo realmente está fora de controle. É o indicador estatístico mais utilizado para avaliar o desempenho de um gráfico de controle. Este parâmetro leva em conta os valores dos erros Tipo I e Tipo II, isto é, o custo associado à procura do problema inexistente e o custo associado à fraca qualidade que se obtém no produto final desde quando a mudança ocorre até que seja detectada. Por este motivo, para avaliar os parâmetros de um gráfico de controle, costuma-se estudar o comportamento de ARL diante das várias amplitudes de mudança uma vez que, pretende-se que o ARL do gráfico seja grande quando o processo está sob controle e pequeno quando o processo está fora de controle. Quando o processo está sob controle, e os pontos que se marcam no gráfico são independentes, o ARL é dado por

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha} \quad (3)$$

onde ARL_0 é o número médio de amostras coletadas até que ocorra um alarme falso, quando o processo está sob controle e α é a probabilidade de cometer um erro Tipo I (probabilidade de alarme falso). No controle estatístico para o caso univariado como, por exemplo, o gráfico \bar{X} de Shewhart com os limites 3σ , toma-se $\alpha = 0,0027$ o que supõe um $ARL_0 \cong 370$, isto é, mesmo que o processo permaneça sob controle, um sinal fora de controle será emitido a cada 370 amostras, em média. Na bibliografia relativa a gráfico de controle os valores $\alpha = 0,005$, $\alpha = 0,002$ e $\alpha = 0,001$, corresponde a um $ARL_0=200$, $ARL_0=500$ e $ARL_0=1000$, respectivamente.

Para determinada mudança de valor d , o ARL é dado por $ARL_1 = \frac{1}{1-\beta}$ que é o número médio de amostras coletadas até que seja sinalizado uma situação de fora de controle e β é a probabilidade de cometer um erro Tipo II (probabilidade de não detectar que o processo está fora de controle supondo independência das amostras). Assim, a equação (3) só é aplicável aos gráficos de controle do tipo Shewhart uma vez que os gráficos com memória tais como CUSUM, EWMA, etc, os pontos demarcados não são independentes.

A determinação exata dos parâmetros de um gráfico de controle CUSUM tais como o ARL nem sempre é possível pelo fato das estatísticas de controle serem variáveis aleatórias dependentes. No entanto, existem alguns métodos numéricos que permitem otimizar estes parâmetros, entre as quais podemos destacar o Método de Equação Integral, o Método de Cadeias de Markov e o Método de Simulação.

Em análise de processos, em geral, não é viável que o procedimento de controle escolhido gere muitos falsos alarmes. Portanto, a estratégia utilizada no projeto de um gráfico de controle baseia-se na escolha de um valor de ARL grande quando o processo estiver sob controle. Este valor é representado por ARL_0 e indica em média o número de amostras coletadas até que ocorra um falso alarme. De posse do valor de ARL_0 o gráfico de controle deve ser projetado de modo que o tamanho da mudança d , que se deseja detectar, seja sinalizado no gráfico a partir de um número de amostras coletadas até que seja sinalizada uma situação fora de controle referente a um desvio do valor nominal.

O par de parâmetros (k,h) é ótimo, no sentido que para uma probabilidade de erro tipo I

fixado (ARL_0) produz a menor probabilidade de erro tipo II (ARL_1) possível para uma mudança especificada. Este par de valores (k, h) ótimo, em geral, dependerá da magnitude da mudança. Uma análise de sensibilidade pode mostrar como varia a probabilidade do erro tipo I para diferentes pares (k, h) próximos da combinação (k, h) ótima (Gan, 1991).

4. Método de Otimização do Gráfico CUSUM

Em situações em que o processo é muito capaz ou dificilmente ajustável pode não ser interessante detectar mudanças de pequena magnitude. Segundo Woodall (1985), tentar ajustar um processo quando a mudança da média é muito pequena pode levar ao fenômeno de sobre ajuste e da introdução de variabilidade extra no processo. Portanto, é mais interessante decidir que tamanho de mudança é realmente importante detectar, e tendo isto como base, selecionar aquele gráfico de controle que seja muito eficiente quando realmente é necessário, e que tenha uma probabilidade baixa de alarmes falsos.

O desenvolvimento do método de otimização proposto nesse trabalho permite o usuário determinar os parâmetros estatísticos ótimos do gráfico de controle CUSUM para monitorar processos em que não resulte apenas a detecção de mudanças de pequena magnitude, mas, sobretudo, seja ao mesmo tempo um método muito eficaz para detectar mudanças realmente importantes. Neste método um procedimento simples baseado em ARL é desenvolvido para o projeto estatístico ótimo de um gráfico CUSUM sugerido por Gan (1991), porém com a proposta de adicionar ao algoritmo de procedimento proposto uma etapa extra que contemple a otimização de parâmetros suficiente para maximizar a capacidade de detecção de mudanças reais deste gráfico. Esta etapa extra se constitui como uma alternativa de avaliação prévia para otimizar os parâmetros deste gráfico baseado em ARL e sob a ótica de regiões de máximo e mínimo ARL. Isso é imprescindível para detectar no processo mudanças consideradas importantes. Com esta alternativa, torna-se possível detectar mudanças significativas, e que, simultaneamente, apresente uma probabilidade de alarme falso, realmente baixa quando se produzem mudanças cuja detecção não seja de interesse prático.

As etapas para o desenvolvimento do projeto estatístico para otimizar os parâmetros do gráfico CUSUM propostas neste trabalho conforme a seguir:

- Etapa 1: Escolher o menor ARL_0 aceitável.
- Etapa 2: Decidir o menor deslocamento (tamanho de mudança) aceitável, d na média do processo que é extremamente importante ser detectado rapidamente. Para isso, é fundamental escolher corretamente o parâmetro ótimo do gráfico, k capaz de produzir o ARL mínimo para o deslocamento da média, d , baseado no ARL_0 especificado na etapa 1.
- Etapa 3 (**Proposta**): Aplicar no método de otimização da função perda de Taguchi cujo procedimento dessa etapa é utilizado para obter os pontos ótimos A e B que delimitam as regiões de máximo e mínimo ARL. Com isso, é possível determinar a região sob controle, $d \leq A$ e a região fora de controle, $d \geq B$ para detectar o mais rápido possível uma mudança. Além disso, utiliza-se esse valor d , para quantificar o desvio entre a média e o valor nominal da característica de qualidade considerada. Neste trabalho, o objetivo principal é sem dúvida minimizar este valor d , com a implementação de um modelo matemático para obter o ponto ótimo, ou seja, o ponto que tenha um deslocamento mínimo da média em relação ao valor nominal.
- Etapa 4: Conhecido o valor ótimo de k , determinar o limite de controle h , de modo que o gráfico CUSUM produza o ARL_0 especificado na etapa 1.

4.1 Otimização dos Parâmetros Estatísticos do gráfico CUSUM baseado em Regiões de Máximo e Mínimo ARL

O método usual de comparação da potência de diferentes gráficos de controle se fundamenta nos valores de ARL. Para que dois projetos de gráficos de controle sejam comparados, ambos devem apresentar o mesmo ARL quando o processo se encontra sob controle, isto é, quando não existe nenhuma mudança na média da característica da qualidade monitorada. O gráfico de controle mais eficiente ou de maior potência para detectar mudanças é aquele que apresenta um ARL grande quando o processo se encontra sob controle e um ARL pequeno quando o processo está fora de controle.

Por outro lado, é sabido que sob o ponto de vista econômico se considera que o custo de operação do processo (custo médio por hora de produção quando há uma mudança na média do processo) é proporcional ao número de alarmes falsos, e que sob o ponto de vista estatístico pode ocorrer que o número de alarmes falsos seja uma fonte de variabilidade extra no processo.

Diante do que anteriormente foi exposto, Woodall (1985) sugere um projeto estatístico para gráfico de controle e recomenda tomar como critério deste projeto, a seleção do tamanho da mudança que seja importante detectar. Para isso, propõe a definição de três regiões de controle: região sob controle, região indiferente, e região fora de controle. Estas regiões são delimitadas por dois valores (A e B) do tamanho da mudança (medido em unidades de desvios padrão) a ser detectada conforme figura 1.

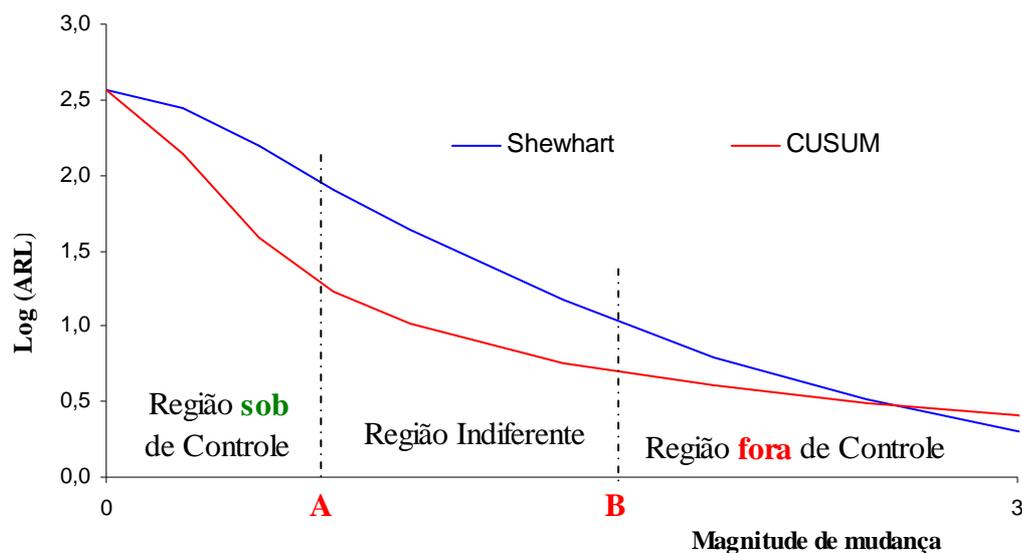


Figura 1 - Pontos A e B que delimitam as regiões de máximo e mínimo ARL do gráfico

Conforme figura 1, as regiões de máximo e mínimo ARL podem ser definidas como:

- Região Sob Controle, $[0, A]$. Esta região corresponde a um estado equivalente ao de estado sob controle e corresponde ao tamanho de mudança compreendido entre $d=0$ e $d=A$. Nesta região não se deseja detectar alguma mudança. No entanto, deseja-se um ARL máximo. Se o gráfico mostrar um sinal fora de controle considera-se então este sinal como um falso alarme.
- Região Fora de Controle, $[B, \infty)$, corresponde ao valor de mudança $d=B$, a partir do qual se requer a máxima eficácia de detecção. Além disso, se deseja um ARL mínimo.
- Região Indiferente, (A, B) , compreendida entre $d=A$ e $d=B$. Nesta região é indiferente detectar ou não uma mudança no processo.

Como exemplo, pode-se observar através da curva de ARL (figura 1) que ambos os gráficos de controle CUSUM e do tipo Shewhart com $ARL_0=370$, possuem o mesmo ARL para $d = 0$ onde o gráfico ótimo é aquele que apresenta maior ARL na região sob controle e menor ARL na região fora de controle. Esta situação caracteriza o gráfico de controle com menor probabilidade de alarme falso e sobretudo mais eficaz para detectar mudanças que devem ser rapidamente detectadas.

O enfoque de Woodall (1985) que aborda a utilização de regiões de máxima e mínima potência em projetos de otimização para gráficos de controle se encontra justificado em situações que aparecem frequentemente na indústria. Entre outros, e como exemplo, vamos analisar três tipos de processos característicos:

a) Processos muito capazes: um tipo de processo onde pode resultar pouco interesse em detectar pequenas mudanças na média do processo referente ao valor nominal são aqueles que apresentam elevada capacidade real ($C_{pk} = 1,5$), típicos de setores como o da automação.

b) Processos dificilmente ajustáveis: em alguns processos industriais, independentemente de considerações econômicas, acontece que por razões técnicas ou físicas tenham um comportamento que os transforma em dificilmente ajustáveis, quando no início o processo já está fora do valor nominal, típicos de processos onde uma ferramenta de corte sofre desgastes contínuos e graduais.

c) Processos com um elevado custo econômico de ajuste: em muitos processos o ajuste para que se trabalhe no valor nominal centrado nas especificações requer a parada do processo e a regulação da máquina utilizada neste processo. Esta operação pode requerer um período elevado de tempo com a conseqüente perda de produção associada a esse tempo produtivo.

5 Função Perda de Qualidade de Taguchi

Um sistema de avaliação da qualidade de produtos é baseado em um conceito atribuído por Taguchi. Segundo Taguchi (1986,1993), a qualidade de um produto é a perda mínima imposta por este produto à sociedade no decorrer de sua utilização. Do ponto de vista social este conceito de qualidade é único porque incluem fabricantes, clientes e a sociedade como um todo. Esta filosofia enfatiza a importância econômica de alcançar uma baixa variabilidade, uma coerência funcional e, sobretudo uma alta qualidade.

No conceito tradicional de avaliação de um sistema de qualidade, um produto é classificado como não conforme se a característica da qualidade do produto sob controle e, se encontra fora dos limites de especificação incorrendo em uma determinada perda econômica. Caso contrário, o produto é classificado como conforme e sem perda econômica. Neste enfoque (filosofia ocidental), utiliza-se uma avaliação binária de qualidade com especificações ou tolerâncias onde por exemplo, uma peça é classificada como absolutamente conforme se está dentro de tolerâncias e como não conforme quando está fora de tolerâncias. Do ponto de vista de Taguchi, esta perda é nula quando a característica da qualidade se encontra dentro das tolerâncias e que a perda é total quando se encontra fora das especificações.

O enfoque japonês de Taguchi contempla a avaliação contínua da qualidade de um produto baseado na perda econômica que significa a variação das características da qualidade referente aos valores nominais definidos. Para Taguchi a perda é nula somente quando o valor da característica da qualidade coincide com o valor nominal e aumenta de forma contínua à medida que se afasta do valor nominal ainda que se cumpram as especificações. As idéias anteriores se modelam na conhecida função perda de Taguchi para à tomada de decisões.

Seja $L(y)$ a função da medida da perda de qualidade associada à característica de qualidade e y uma função diferenciável na vizinhança de T , onde T é o valor nominal. A expansão da série de Taylor $L(y)$, na vizinhança de T pode ser escrita como uma série infinita conforme a seguir:

$$L(y) = L(T) + \frac{L'(T)}{1!}(Y - T) + \frac{L''(T)}{2!}(Y - T)^2 + \dots, \quad (4)$$

Observa-se que a meta T (valor alvo) é desenvolvida de modo que a perda de qualidade seja mínima em T e, portanto, $L'(T)=0$. Além disso, supõe-se que a perda de qualidade com o valor alvo seja zero tal que $L(T) = 0$. Com esses dois pressupostos, a série de Taylor se reduz a:

$$L(y) = \frac{L''(T)}{2!}(Y - T)^2 + \dots, \quad (5)$$

Assumindo que termos de ordem superior além do termo de 2ª ordem são considerados desprezíveis, logo uma aproximação truncada para a função perda de qualidade pode ser dada como uma simples função quadrática que avalia a perda, em termos econômicos, de um produto em relação ao valor de uma de suas características quantitativas da qualidade mediante uma função quadrática do tipo

$$L(y) = k(y - T)^2 \quad (6)$$

onde y é o valor da característica quantitativa da qualidade de Y considerada, T é o valor nominal (valor alvo), k é o coeficiente positivo de perdas (constante de proporcionalidade) baseado nas perdas estimadas relativas a um limite de especificação. Em outras palavras,

$$k = \frac{A}{\sigma^2} = \frac{A}{(LSE - T)^2}, \text{ onde } A \text{ representa a perda devido ao desvio } \sigma \text{ de desempenho do}$$

produto a partir de T , ou seja, o custo de se produzir um produto fora do especificado e LSE limite superior especificado para a característica da qualidade em questão. (custo, dentro dos limites de especificação). Além disso, é sabido que o valor esperado da função perda de qualidade $L(y)$ é dado por uma equação que representa a forma geral de perdas esperadas cujo valor pode ser aplicado a todas as distribuições da variável aleatória y , conforme a seguir:

$$E[L(y)] = k[(\mu - T)^2 + \sigma^2] \quad (7)$$

onde μ e σ^2 são respectivamente, a média e a variância do processo. É importante salientar que, para reduzir a perda, o viés do produto igual a $|\mu - T|$ e a variância σ^2 precisam ser reduzidos.

A utilização da função perda econômica $L(y)$ produzida pelo fato da característica da qualidade de interesse desviar-se do valor nominal conforme equação (6) é fundamental para atender propósitos gerenciais como o valor monetário da consequência de qualquer aperfeiçoamento em qualidade. Essa expressão matemática estabelece uma medida financeira para o cálculo do desvio de uma característica do produto com relação ao valor nominal. Quando se fala da fabricação de um produto se faz referência ao conjunto de unidades fabricadas pelo processo considerado. Tais unidades fabricadas apresentarão variabilidade referente a característica da qualidade considerada onde cada uma delas terá qualidade diferente. Esta qualidade se obtém encontrando o valor esperado da função de perdas.

Nesta seção propõe-se a utilização da função perda de qualidade de Taguchi para determinar no gráfico os valores de ARL que delimitam as regiões sob controle e fora de controle.

Seja Y uma variável aleatória com distribuição normal de média μ e desvio padrão σ que representa uma característica de qualidade quantitativa. Considera-se que o processo se

encontra sob controle e centrado no valor nominal T. Os limites das especificações são T_1 e T_2 .

Suponha C_A o custo máximo admissível para a empresa devido a mudanças de processo. Este custo representa a perda insignificante incorrida quando o desvio em relação ao valor nominal T é y_A . Neste caso, a empresa não está interessada na detecção de mudanças do processo que produzem um custo menor do que C_A , pois esta ação não é rentável. Suponha C_B o custo inaceitável de produção da empresa devido a mudanças de processo. Conseqüentemente, o processo de mudanças que produzem um custo maior C_B que devem ser rapidamente detectado. Este custo representa a perda significativa incorrida quando o desvio em relação ao valor nominal T é y_B .

Pode-se escrever $C_A=L(y_A)$ e $C_B=L(y_B)$. Com isso, se cumpre que $T \leq y_A \leq y_B \leq T_2$ ou, também, $T_1 \leq y_B \leq y_A \leq T$ conforme figura 2.

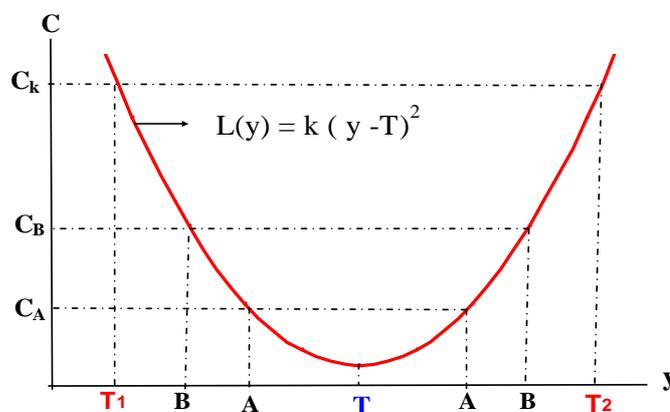


Figura 2 - Função perda de Taguchi com o custo máximo admissível e custo inaceitável

Como se pode observar, à medida que o valor da característica de qualidade se afasta do valor nominal a perda aumenta de forma contínua e sem saltos abruptos, mesmo que ultrapassem os limites de especificações. Isto representa a maior perda de qualidade inferior que tem o produto. Quando o produto está no valor nominal T, a perda do produto é o mínimo que se pode obter. O valor da constante k pode ser determinado mediante o conhecimento da perda associada a um valor da característica de qualidade diferente do valor nominal. Por exemplo, se é conhecida a perda associada ao valor $y=A$, k se pode obter mediante a seguinte equação:

$$k = \frac{L(A)}{(A - T)^2} \quad (8)$$

A função perda de Taguchi dada pela equação (6), pode ser escrita da seguinte forma:
 $L(y_A) = k(y_A - T)^2$ e $L(y_B) = k(y_B - T)^2$ (9)

onde para determinar k deve-se conhecer o valor de $L(y)$ associado a um valor da variável Y diferente do valor nominal que pode ser tanto o custo como a perda associada a um valor que se encontra fora dos limites de especificações. A este valor de, $L(y_k)$, chamamos de C_k e

aplicando a equação (8) se obtém o valor de $k = \frac{L(y_k)}{(y_k - T)^2}$.

Em controle estatístico de processos uma característica da qualidade quantitativa é monitorada com média μ_o e desvio padrão σ_o , o tamanho da mudança d produzido na média quando, esta passa de μ_o para μ_1 , e se mantém constante a dispersão, é medida pela expressão:

$$d = \frac{|\mu_1 - \mu_o|}{\sigma_o} \quad (10)$$

onde $d=0$ quando o processo está sob controle e $d > 0$ quando está fora de controle. Conhecido o valor de descentralização $d = \frac{|y-T|}{\sigma}$, os valores dos custos C_A , C_B e C_k e os desvios do valor nominal y_A e y_B é possível determinar o desvio relativo ao valor nominal em unidade de σ .

$$d_A = |y_A - T| \quad \text{e} \quad d_B = |y_B - T| \quad (11)$$

Esses são os valores dos pontos de (máximo e mínimo ARL) que delimitam no gráfico as regiões sob controle e fora de controle, ou seja, $A = d_A$ e $B = d_B$. A figura 2 ilustra estes pontos que delimitam tais regiões.

6 Exemplo de Aplicação

Para esclarecer a sistemática do projeto de otimização dos parâmetros estatísticos do gráfico CUSUM utilizando a função perda de Taguchi sob a ótica de regiões de máximo e mínimo ARL proposto neste trabalho é apresentado a seguir um exemplo numérico ilustrativo.

Seja um processo de fabricação que produz eixos onde o diâmetro é a característica de qualidade de interesse. O valor nominal é 50 mm e as especificações de fabricação são $50 \pm 0,5$ mm. Se o diâmetro de um eixo se encontra fora de especificação se produz com uma perda de 80 unidades monetárias (u.m.). A empresa considera um custo ou perda insignificante de 8.u.m. e, portanto a empresa não está interessada em detectar mudanças do processo cujo custo associado seja inferior desse custo insignificante ou aceitável. No entanto, ela considera inaceitável um custo ou perda de 40 u.m. e, portanto, está muito interessada em detectar mudanças que produzem perdas acima desse valor inaceitável. Neste caso, $C_A = 8$ e $C_B = 20$ e $C_k = 80$. A função perda de Taguchi, $L(y)$, pode ser determinada calculando o valor de k através da equação (8) sabendo que $C_k = L(y_k) = L(T_1) + L(T_2)$. Neste caso, temos: $80 = L(50,5) = L(49,5)$ e, portanto, $k = \frac{80}{(50,5 - 50)^2} = 320 \text{ u.m. / mm}^2$ sendo a função perda de

Taguchi $L(y) = 320.(y - 50)^2$. Das equações (9), pode-se obter y_A e y_B , ou seja,

$8 = 320.(y_A - 50)^2 \rightarrow y_A = 50,16 \text{ mm}$ e $20 = 320.(y_B - 50)^2 \rightarrow y_B = 50,35 \text{ mm}$ e os valores dos desvios, d em relação ao valor nominal em unidade de σ são obtidos através das equações (11) da seguinte forma: $d_A = |y_A - T| = 50,16 - 50 = 0,16$ e $d_B = |y_B - T| = 50,35 - 50 = 0,35$, ou seja, estamos interessados em detectar mudanças na média do processo que gerem desvios superiores a $0,35\sigma$ mas não detectar desvios inferiores a $0,16\sigma$. A detecção entre $0,16$ e $0,35\sigma$ é indiferente.

Um simples modelo matemático em ambiente MS-Excel usando a ferramenta Solver pode ser aplicado para determinar esses pontos que otimizam (minimizam) o desvio d , ou seja, os menores desvios em relação ao valor nominal T conforme figura 3 que ilustra apenas o cálculo de d_A .

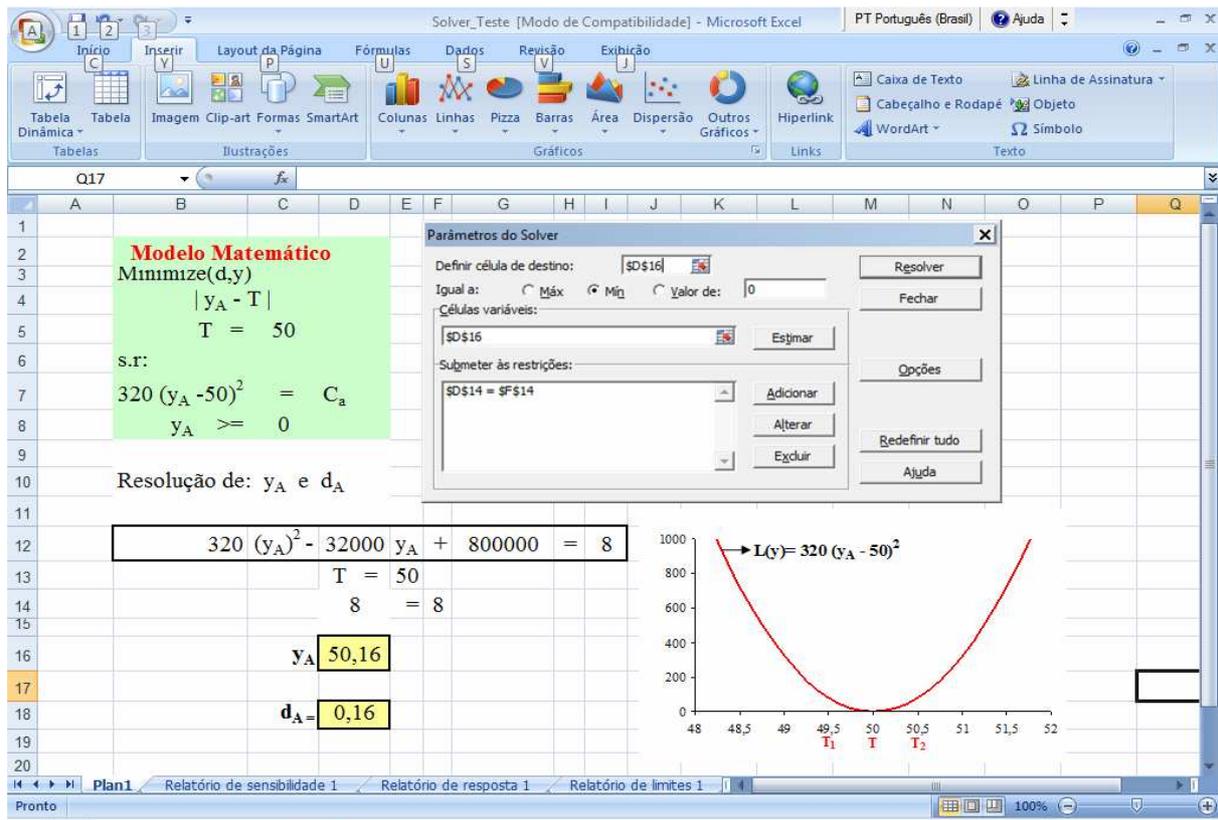


Figura 3 - Modelo matemático que otimiza o desvio d (pontos máximo ou mínimo ARL) do gráfico

A localização dos pontos de (máximo e mínimo ARL) que delimita as regiões sob controle e fora de controle estatístico do gráfico CUSUM deste exemplo é ilustrado conforme figura 4.

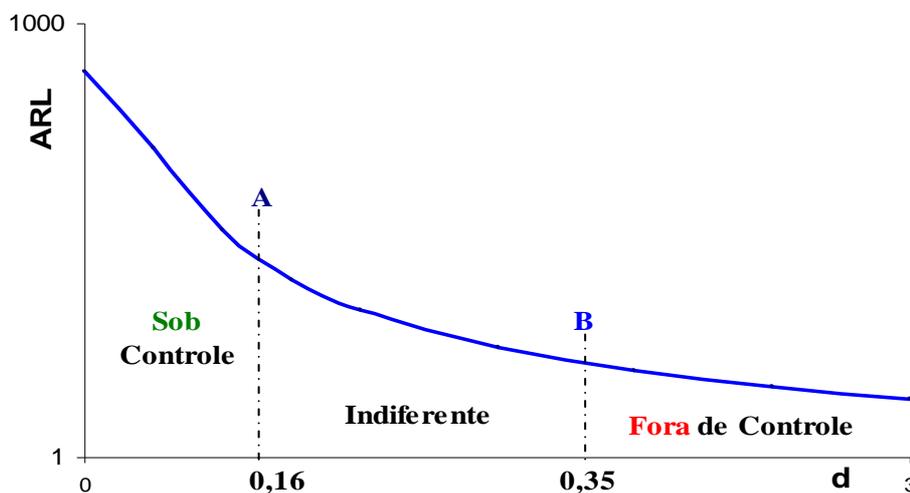


Figura 4 - Pontos A e B que delimitam as regiões de máximo e mínimo ARL do gráfico

Conhecidos os pontos ótimos A e B que delimitam as regiões de máxima e mínima potência do gráfico conforme etapa 3 proposta para o algoritmo de procedimentos do projeto estatístico ótimo do gráfico CUSUM, conclui-se que para este exemplo o tamanho da mudança desejado é $d=0,35$ ($d=B$). Portanto, o interesse nesse caso deve estar focado $d > 0,35$ ($d_B > 0,35$). A partir destes pontos ótimos determina-se na etapa 4 o valor de referência, k e seleciona-se o limite de controle h , ou seja, o par de parâmetros (k, h) de modo que o gráfico CUSUM produza o ARL_0 especificado na etapa 1. Além disso, nesse exemplo analisou-se o caso em que o processo estava centrado no valor nominal T . Vamos agora, dar seqüência a este estudo

para o caso em que o processo não está centrado no valor nominal, situação mais real que a anterior. Quando o processo não está centrado a variável aleatória Y se distribui segundo uma normal de média μ e desvio padrão σ , sendo agora, $\mu \neq T$. Suponhamos que $\mu > T$ e $\mu \leq y_a \leq y_b \leq T_2$ então temos que $d_A = \frac{|y_A - \mu|}{\sigma}$ e o desvio não centrado em unidades de σ é $d_A = |y_A - \mu| = d_1$. Quando o processo estava sob controle centrado no valor nominal T é $d_A = |y_A - T| = d_2$ que confirma $d_1 < d_2$, delimitando a região sob controle. À medida que o processo se descentraliza se reduz a região sob controle alcançando o máximo quando se tem processo centrado no valor nominal T . A redução da região sob controle é, portanto:

$$\% \text{ de redução} = \left(1 - \frac{d_1}{d_2}\right) \cdot 100 = \left[1 - \frac{|y_A - \mu|}{|y_A - T|}\right] \cdot 100. \text{ Para determinar o início da região onde}$$

nos interessa detectar uma mudança na média utilizamos a equação $d_B = |y_B - \mu|$. Agora, supõe-se que este processo produz eixos cujo diâmetro segue uma distribuição normal de média 50,1 mm e desvio padrão 0,1 mm. Em primeiro lugar, analisa-se a capacidade real

de nosso processo: $C_{pk} = \frac{T_2 - \mu}{3\sigma} = \frac{50,5 - 50,1}{3 \cdot (0,1)} = 1,33$. Logo o processo é realmente capaz.

Com isso, a pergunta é: que perda média de qualidade por peça fabricada estamos tendo? Através da equação (7) obtém-se $E[L(y)] = 320 \cdot [(0,1)^2 + (50,1 - 50)^2] = 6,4$. Logo, observa-se ainda que o processo seja realmente capaz se produz perda. Se agora focarmos centralizar o processo no valor nominal a perda média por peça fabricada no que se incorre é apenas a metade, ou seja, $E[L(y)] = 320 \cdot (0,1)^2 = 3,2$. A região sob controle pode ser determinada por $d_A = |y_A - \mu| = 50,16 - 50,1 = 0,06\sigma$.

A região de máxima detecção iniciará em $d_B = |y_B - \mu| = 50,35 - 50,1 = 0,25\sigma$. Logo estamos interessados em detectar mudanças na média do processo que gerem desvios não centrados superiores a $0,25\sigma$, mas não detectar desvios não centrados inferiores a $0,06\sigma$. Já a detecção entre $0,06$ e $0,25\sigma$ é indiferente. Finalmente pode-se determinar a percentagem de redução obtida da região sob controle, através da equação:

$$\% \text{ de redução} = \left[1 - \frac{|50,16 - 50,1|}{|50,16 - 50|}\right] \cdot 100 = 63\%. \text{ Assim, os valores dos pontos A e B (máximo}$$

e mínimo ARL) que delimitam no gráfico as regiões sob controle e fora de controle do processo centrado são $A=0,16$ e $B=0,35$ e do processo não centrado são $A=0,06$ e $B=0,25$.

7. Considerações Finais

Em determinadas situações de um processo pode não ser de interesse prático detectar alterações de pequena magnitude, sendo mais interessante detectar mudanças consideradas importantes. Com isso, torna-se possível detectar mudanças realmente significativas, e que, simultaneamente, apresente uma baixa probabilidade de alarme falso.

A forma conveniente para especificar as mudanças consideradas importantes para detectar rapidamente, é a utilização da função perda de Taguchi nos permite definir as regiões sob controle, indiferente e fora de controle propostas por Woodall. Uma vez que definidas estas regiões (utilizando ou não), o objetivo é desenvolver um gráfico de controle CUSUM que satisfaça os requisitos de desempenho de ARL através destas áreas. Nestas situações, o gráfico de controle CUSUM, embora originalmente desenvolvido para detectar pequenas mudanças do processo, pode ser projetado para obter um desempenho compatível sob a perspectiva dessas regiões.

A otimização dos parâmetros estatísticos sob a ótica de regiões de máximo e mínimo ARL para o gráfico CUSUM pode ser uma excelente alternativa em situações práticas como processos muito capazes, processos dificilmente ajustáveis ou cujo custo de ajuste seja elevado.

É importante salientar ainda que a implementação de qualquer gráfico de controle que se considere, pressupõe uma escolha adequada dos seus parâmetros estatísticos, uma vez que a sua eficiência depende em parte desta escolha (ALVES, 2003).

Referências

ALVES, C.C. *Gráficos de controle CUSUM: um enfoque dinâmico para a análise estatística de processos*. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Produção, UFSC, Florianópolis, 2003.

ALVES, C.C.; ZAGO, V.A.; HENNING, E.; SAMOHYL, R.W. *Aplicação de gráficos de controle com memória para o monitoramento de processos industriais: um estudo comparativo*. XLIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Ubatuba-SP, 2011.

ALVES, C.C.; CRUZ A.C.; HENNING, E.; Cruz, NETO, A.S. *A Utilização de Gráficos de Controle de Soma Acumulada (CUSUM) para Monitoramento de um Processo de Usinagem*. Cadernos do IME – Série Estatística, vol.27, pág. 45-58, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), 2009.

ALVES, C.C. *O método de Equação Integral com Quadratura Gaussiana para otimizar os parâmetros do gráfico de controle multivariado de Somas Acumuladas*. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção e Sistemas. Universidade Federal de Santa Catarina, 2009.

GAN, F. F. *An optimal design of CUSUM quality control charts*. Journal of Quality Technology. 23, 279-286, 1991.

GAN, F. F. *The Run Length of a Cumulative Sum Control Chart*. Journal of Quality Technology, 25, 205-215, 1993.

MONTGOMERY, D. C. *Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade*. 4ª ed., LTC, Rio de Janeiro, 2004.

PAGE, E.S. *Continuous Inspection Schemes*. Biometrika, v.41, p.100-115, 1954.

JIAO, J.R. ; HELO, P.T. *Optimization design of a CUSUM control chart based on taguchi's loss function*. Int J Adv. Manuf. Technol. v. 35:1234–1243, 2008.

SAMOHYL, R.W. *Controle Estatístico da Qualidade*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2009.

TAGUCHI, G. *Introduction to quality engineering*. While Plains, NY: UNIPUB/Kraus International publications, and Dearborn, MI: American Supplier Institute Inc., 1986.

TAGUCHI, G. *Taguchi on robust technology development*. New York: ASME Press, 1993.

WOODALL, W.H. *The statistical design of quality control charts*. The Statistician; 34: 155–60, 1985

ZAGO, V.A. *Avaliação da aplicação de gráficos de controle com memória em uma indústria de papel e embalagens*. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Produção, UFSC, Florianópolis, 2009.